CI3725 - Traductores e Interpretadores
Abril-Julio 2006
Prof. Ernesto Hernández-Novich

Laboratorio Semana II

1. Demuestre que $P = W$ siendo el conjunto

$$W = \{w \in \Sigma^* | w = w^R\}$$

y el conjunto P definido recursivamente sobre Σ como

(a) $\lambda \in P$
(b) Si $a \in \Sigma$, entonces $a \in P$
(c) Si $w \in P$ y $a \in \Sigma$, entonces $awa \in P$

Primero demostraremos que $P \subseteq W$ usando inducción en el número de aplicaciones de las reglas recursivas de construcción de P y mirando que el resultado siempre está en W.

Caso Base:

Los casos base son todos aquellos elementos de P que no son generados con la regla recursiva.

- $\lambda \in P$ y observamos que $\lambda = \lambda^R$, por tanto $\lambda \in W$.
- $\forall a \in \Sigma \Rightarrow a \in P$ y observamos que $a = a^R$, por tanto $a \in W$.

de modo que para el caso base, todo lo que está en P también está en W.

Hipótesis Inductiva:

Asumiremos que cualquier $w \in P$ generada en n o menos aplicaciones de la regla recursiva de construcción, cumple $w = w^R$, es decir, $w \subseteq W$.

Inducción:

Sea $u \in P$ una cadena generada en $n+1$ aplicaciones de la regla recursiva de construcción. Entonces, $u = awa$ para algún $w \in W$ y $a \in \Sigma$, más aún w ha sido generado en n aplicaciones de la regla recursiva de construcción. Entonces podemos ver

$$\begin{aligned}
u^R &= (awa)^R \\
&\quad \{\text{Aplicamos reverso en ambos términos}\} \\
&= a^R w^R a^R \\
&\quad \{\text{Teorema 2.1.6}\} \\
&= a w^R a \\
&\quad \{\text{Reverso de un símbolo es el mismo símbolo}\} \\
&= awa \\
&\quad \{\text{Hipótesis inductiva}\} \\
&= u
\end{aligned}$$

y en consecuencia $u^R = u \Rightarrow u \in W$, por lo tanto $P \subset W$.

Ahora demostraremos que $W \subseteq P$ usando inducción en la longitud de las cadenas de W.

Caso Base:

Sea $w \in W$, entonces hemos de considerar dos casos base:

- $largo(w) = 0 \Rightarrow w = \lambda$ y observamos $\lambda \in P$.
- $largo(w) = 1 \Rightarrow w = a$ con $a \in \Sigma$, y observamos $a \in P$.

de modo que en el caso base, todo lo que está en W también está en P.

Hipótesis Inductiva:

Asumiremos que cualquier $w \in W$ tal que $largo(w) \leq n$ es tal que $w \in P$.

Inducción:

Sea $w \in W$ una cadena tal que $largo(w) = n + 1$ con $n \geq 1$. Entonces puede escribirse $w = ua$ donde $largo(u) = n$. Entonces podemos ver

$$\begin{array}{rcl} w & = & w^R \\ & & \{w \in W\} \\ & = & (ua)^R \\ & & \{\text{Sustituyendo el valor de } w\} \\ & = & a^R u^R \\ & & \{\text{Definición de reverso}\} \\ & = & au^R \\ & & \{\text{Reverso de un símbolo es el mismo símbolo}\} \end{array}$$

Eso nos muestra que w comienza y termina con el mismo símbolo a, por lo tanto puede escribirse como $w = ava$ con $v \in W$ y $largo(v) = n - 1$. Podemos ver

$$\begin{array}{rcl} w^R & = & (ava)^R \\ & & \{\text{Teorema 2.1.6}\} \\ & = & a^R v^R a^R \\ & & \{\text{Reverso de un símbolo es el mismo símbolo}\} \\ & = & av^R a \end{array}$$

Como $w \in W \Rightarrow w = w^R$ entonces $ava = av^R a$, más aún $v = v^R$. Por la hipótesis inductiva $v \in W$, y en consecuencia $v \in P$. Y por la definición recursiva de P sigue que $ava \in P$, así que $W \subseteq P$.

Hemos visto que $P \subseteq W \wedge W \subseteq P \Rightarrow P = W$.